NILAI KETAKTERATURAN TOTAL DARI LIMA *COPY* GRAF BINTANG

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Program Studi Matematika

oleh:

ERA NAPRA TILOPA SIHOMBING
11654203479

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2020

LEMBAR PERSETUJUAN

NILAI KETAKTERATURAN TOTAL DARI LIMA *COPY* GRAF BINTANG

TUGAS AKHIR

oleh:

ERA NAPRA TILOPA SIHOMBING
11654203479

Telah diperiksa dan disetujui sebagai Laporan Tugas Akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 27 Juli 2020

Ketua Program Studi	**Pembimbing**
Ari Pani Desvina, M.Sc	**Corry Corazon Marzuki, M.Si**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP. 19860320 201503 2 001**

LEMBAR PENGESAHAN

NILAI KETAKTERATURAN TOTAL DARI LIMA *COPY* GRAF BINTANG

TUGAS AKHIR

oleh:

ERA NAPRA TILOPA SIHOMBING
11654203479

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 27 Juli 2020

Pekanbaru, 27 Juli 2020
Mengesahkan,

Dekan	Ketua Program Studi
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag	**Ari Pani Desvina, M.Sc**
NIP. 19660604 199203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI:

Ketua : **Dr. Riswan Efendi, M.Sc**

Sekretaris : **Corry Corazon Marzuki, M.Si**

Anggota I : **Fitri Aryani, M.Sc**

Anggota II : **Sri Basriati, M.Sc**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustaaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebut sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh tugas akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjam tugas akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam tugas akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelas kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka

Pekanbaru, 27 Juli 2020
Yang membuat pernyataan,

ERA NAPRA TILOPA SIHOMBING
11654203479

LEMBAR PERSEMBAHAN

Sujud syukurku kepada Allah SWT
Maha pemberi maaf, Maha pemberi limpahan kasih sayang, Maha pemberi segalanya, Terima kasih atas berkah yang Engkau berikan kepadaku.

Kupersembahkan karya sederhana ini untuk orang yang sangat kucintai dan kusayangi, Ayahanda dan Ibunda Tercinta sebagai tanda bakti, hormat dan rasa terima kasih yang tiada henti.

Teruntuk Ayahanda Lintong Sihombing dan Ibunda Marlinda Wati
Terima kasih atas limpahan kasih sayang yang kalian berikan, segala motivasi, dukungan, doa yang tiada terhingga.

Teruntuk adik-adikku
Terima kasih telah menjadi penyemangat dalam hidupku, untuk terus berjuang demi mencapai cita-cita dan membahagikan kedua orang tua kita

Teruntuk Dosen Pembimbingku Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si dan Dosen-Dosen Program Studi Matematika
Terima kasih atas segala waktu dan tenaga yang kalian berian untuk membimbing saya dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini

Teruntuk Sahabat-Sahabatku
Terima kasih atas waktu dan kebersamaan yang kalian berikan untuk ku.

NILAI KETAKTERATURAN TOTAL DARI LIMA *COPY* GRAF BINTANG

ERA NAPRA TILOPA SIHOMBING
11654203479

Tanggal Sidang : 27 Juli 2020

Periode Wisuda : 2020

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Misalkan graf $G=(V,E)$ dan k adalah suatu bilangan bulat positif. Pelabelan-k total pada G adalah suatu pemetaaan $f:V\cup E\rightarrow\{1,2,\cdots,k\}$. Bobot titik t dinyatakan dengan $w_f(t)=f(t)+\sum_{ut\in E(G)}f(ut)$ dan bobot sisi ut dinyatakan dengan $w_f(ut)=f(u)+f(ut)+f(t)$. Suatu pelabelan-k total pada G dikatakan tak teratur total, jika bobot setiap titik berbeda dan bobot setiap sisi berbeda. Nilai k terkecil sehingga suatu graf G memiliki pelabelan-k total tak teratur total disebut dengan nilai ketakteraturan total dari G, dinotasikan dengan $ts(G)$. Pada penelitian ini, ditentukan nilai ketakteraturan total dari lima *copy* graf bintang dengan membuktikan $ts(5S_n)\geq\left\lceil\frac{5n+1}{2}\right\rceil$, dan $ts(5S_n)\leq\left\lceil\frac{5n+1}{2}\right\rceil$, sehingga diperoleh $ts(5S_n)=\left\lceil\frac{5n+1}{2}\right\rceil$, dengan n adalah bilangan bulat positif dan $n\geq 3$.

Kata kunci: graf bintang, nilai ketakteraturan total, pelabelan total tak teratur total

TOTAL IRREGULARITY STRENGTH OF FIVE COPIES OF STAR GRAPH

ERA NAPRA TILOPA SIHOMBING
11654203479

Date of final exam: 27th July 2020

Date of graduation: 2020

Matematics Departement
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

Let graph $G = (V, E)$ and k is a positive integer, Total k-labelling on G is a mapping $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \cdots, k\}$. The weight of the vertex t is represented by $w_f(t) = f(t) + \sum_{ut \in (G)} f(ut)$ and the weight of the edge ut is represented by $w_f(ut) = f(u) + f(ut) + f(t)$. A total k-labeling of G is called a totally irregular total labeling, if the weight of every two distinct vertices are different and the weight of every two distinct edges are different. The minimum k such that a graph G has a totally irregular total k-labeling of G is called the total irregularity strength of G, denoted by $ts(G)$. In this research, determined total irregularity strength of five copies of star graph by proving $ts(5S_n) \geq \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$, and $ts(5S_n) \leq \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$, so that it is obtained the $ts(5S_n) = \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$, where n is a positive integer and $n \geq 3$

Keywords: *Star graph, total irregularity strength, totally irregular total labeling.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji dan syukur kehadirat Allah *Subhaahu Wata'ala* atas segala rahmat, nikmat, kesempatan dan kesehatan sehingga penulis bisa menyelesaikan tugas akhir ini. Shalawat beserta salam kita sampaikan buat junjungan alam Nabi Muhammad *Shalallahu Alaihi Wassalam* karena berkat perjuangan beliaulah kita umat manusia yang dibawa dari alam kegelapan ditunjukkan ke alam yang penuh dengan ilmu pengetahuan.

Tugas akhir ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar sarjana sains pada program studi matematika. Dalam menyelesaikan tugas akhir ini penulis tidak lepas dari bimbingan, bantuan dan pengarahan dari berbagai pihak. Teristimewa kepada kedua orang tuaku atas segala doa, kasih sayang, dukungan, semangat dan bantuan yang tidak mungkin terbatas. Disamping itu penulis mengucapkan rasa hormat dan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. KH. Akhmad Mujahidin, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc., selaku Ketua Program Studi S1 Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
4. Bapak Wartono, M.Sc., selaku Pembimbing Akademik penulis yang telah memberi dukungan dan semangat kepada penulis
5. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si., selaku Pembimbing Tugas Akhir penulis yang telah memberikan dukungan, semangat serta arahan sehingga tugas akhir penulis dapat diselesaikan.
6. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. dan Ibu Sri Basriati, M.Sc., selaku penguji yang telah memberikan kritik dan saran sehingga selesainya tugas akhir ini.
7. Seluruh Dosen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberi nasehat, bimbingan serta ilmu kepada penulis.

8. Keluarga tercinta, yang telah memberikan dukungan, motivasi, do'a, dan materi yang tak henti-hentinya serta kasih sayang kepada penulis.
9. Sahabat-sahabat penulis Nur Azizah Br Barus, Siti Rohmawati, Rima Erfianti, Krisni Susilowati, Haslidah, Diska Lily Pratiwi yang telah memberi dukungan dan semangat kepada penulis.
10. Teman-teman seperjuangan Tugas Akhir Penulis angkatan 2016 khususnya kelas A.
11. Teman-teman Koperasi Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau yang telah memberi dukungan dan semangat kepada penulis.

Perlu disadari bahwa dengan segala keterbatasan dalam penulisan tugas akhir ini memiliki kekurangan, sehingga kritik dan saran sangat penulis harapkan demi sempurnanya skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita.

Wassalamu,alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Pekanbaru, 27 Juli 2020

Era Napra Tilopa Sihombing

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan pokok bahasan yang terus mengalami perkembangan sampai saat ini. Graf merupakan pasangan himpunan (V,E), ditulis dengan notasi $G=(V,E)$, V adalah himpunan tak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul (Munir, 2005). Peneliti lain berpendapat graf adalah himpunan (V,E) yang dinotasikan $G=(V,E)$, dimana V adalah himpunan tak kosong dari titik-titik (*vertex*) yang dinotasikan dengan $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, dan E merupakan himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan titik dinotasikan dengan $\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ (Marzuki dkk., 2018).

Teori graf memiliki peran penting dalam kehidupan untuk menyelesaikan suatu permasalahan dalam kehidupan nyata, salah satunya pelabelan pada graf. Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif atau bilangan bulat non negatif(Marzuki dkk., 2016). Berdasarkan unsur yang dilabeli, pelabelan dibagi menjadi tiga jenis, yaitu pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*), dan pelabelan total (*total labeling*). Jika suatu pelabelan hanya melabeli titik, maka pelabelan semacam ini disebut pelabelan titik. Begitu juga dengan pelabelan sisi hanya melabeli sisi. Jika suatu pelabelan melabeli titik dan sisi, maka pelabelan ini disebut pelabelan total (Marzuki dkk., 2016).

Pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, seperti pada pelabelan total tak teratur total. Pengaplikasian pelabelan total tak teratur total digunakan pada sistem pemancar frekuensi radio, permintaan yang besar atas pelayanan wireless, dan terbatasnya frekuensi yang tersedia, memerlukan penggunaan yang efisien. Pada sistem pengaturan radio, nilai ketakteraturan total $(ts(G))$ dapat berupa jarak terkecil, yang memungkinkan dua pemancar untuk melakukan transmisi data tanpa mengalami interferensi, sehingga gelombang sinyal yang digunakan dapat efisien (Marzuki dkk., 2016).

Baca dkk., (2007) memperkenalkan pelabelan-k total tak teratur yang mempunyai dua tipe yakni pelabelan-k total tak teratur sisi dan pelabelan-k total tak teratur titik. Misalkan diberikan suatu graf $G=(V,E)$, untuk suatu bilangan bulat k, pelabelan-k total tak teratur sisi pada G adalah pemetaan $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,\cdots,k\}$ yang memenuhi $w_f(uv)=f(u)+f(uv)+f(v)$ berbeda untuk setiap $uv \in E(G)$. Nilai $w_f(uv)$ disebut bobot sisi uv. Nilai minimum k sehingga G memiliki pelabelan-k total tak teratur sisi, dinotasikan dengan $tes(G)$, disebut nilai ketakteraturan sisi dari G. Untuk semua bilangan bulat k, pelabelan-k, total tak teratur titik pada G adalah pemetaan $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,\cdots,k\}$ yang memenuhi $w_f(v)=f(v)+\sum_{uv \in E(G)} f(uv)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$. Nilai minimum k sehingga G memiliki pelabelan-k total tak teratur titik, dinotasikan dengan $tvs(G)$, disebut nilai total ketakteraturan titik dari G.

Marzuki dkk., (2013) mengkombinasikan pelabelan-k total tak teratur sisi dengan pelabelan-k total tak teratur titik, sehingga didapatkan suatu pelabelan baru, yaitu pelabelan-k total tak teratur total. Pelabelan-k total tak teratur total pada G adalah pemetaan $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,\cdots,k\}$ yang memenuhi $w_f(uv)=f(u)+f(uv)$ berbeda untuk setiap $uv \in E(G)$ dan $w_f(v)=f(v)+\sum_{uv \in E(G)} f(uv)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$. Nilai minimum k sehingga G memiliki pelabelan-k total tak teratur total disebut nilai ketakteraturan total dari G, yang dinotasikan dengan $ts(G)$.

Penelitian Rahangmetan dkk., (2015) membahas "Nilai Ketakteraturan Total Dari Gabungan Terpisah Graf Roda dan Graf Buku Segitiga", hasil penelitian diperoleh gabungan terpisah graf roda $mW_n, n \geq 3, m \geq 2$, dan $n \equiv 0 \bmod 3$, dengan $ts(mW_n)=\left\lceil \frac{2mn+2}{3} \right\rceil$, dan pada gabungan terpisah graf buku segitiga

$(mP_1 \Theta S_n), n \geq 3, n \equiv 1 \bmod 3, \text{dan } m \geq 1)$, dengan $ts(m(P_1 \Theta S_n)) = \left\lceil \frac{m(2n+1)+2}{3} \right\rceil$. Penelitian Julaeha dkk., (2017) membahas "Pelabelan Total Tak Teratur Pada Graf Bunga (F_n)", hasil penelitian diperoleh nilai ketakteraturan total dari graf bunga (F_n) adalah $\left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$. Dan Ramdani (2014) membahas "Nilai Ketakteraturan Total Dari Dua *Copy* Graf Bintang", hasil penelitian diperoleh $ts(2S_n) = n+1$. Berdasarkan latar belakang yang ada, penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul ***"Nilai Ketakteraturan Total dari Lima Copy Graf Bintang".***

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang sebelumnya, masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah "Bagaimana rumus umum nilai ketakteraturan total dari lima *copy* graf bintang?".

1.3 Batasan Masalah

Agar tidak terjadi perluasan pembahasan, maka diperlukan batasan masalah hanya berkaitan dengan nilai ketakteraturan total dari lima *copy* graf bintang dengan $n \in Z$ dimana $n \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan rumus nilai ketakteraturan total dari lima *copy* graf bintang.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah

1. Menambah pengetahuan mengenai graf.
2. Mengetahui nilai ketakteraturan total dari lima *copy* graf bintang.
3. Sebagai sarana informasi dan referensi bagi pihak yang membutuhkan.
4. Sebagai bahan pengembangan ilmu selanjutnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan Tugas Akhir ini mencakup lima bab yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Pada bab ini menjelaskan tentang pengertian graf, terminologi graf, jenis-jenis graf, pelabelan graf dan induksi matematika.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini menjelaskan tentang jenis penelitian dan langkah-langkah menyelesaikan masalah lima *copy* dari graf bintang.

BAB IV PEMBAHASAN

Pada bab ini menjelaskan secara terperinci tentang hasil-hasil yang diperoleh dari lima *copy* graf bintang.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini menjelaskan tentang kesimpulan dari pembahasan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Pengertian Graf

Graf merupakan suatu sistem yang terdiri dari suatu himpunan berhingga dan tak kosong dari obyek yang disebut titik (*vertex*) dan himpunan yang anggota-anggotanya disebut sisi (*edge*), yaitu pasangan tidak terurut dari titik-titik. Pada umumnya, graf dinotasikan $G=(V,E)$, dengan V merupakan himpunan titik, dan E merupakan himpunan sisi (Chartrand dkk., 2010).

Definisi 2.1 (Munir, 2005) Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E), ditulis dengan notasi $G=(V,E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul.

Definisi 2.1 menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi simpulnya harus ada, minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah simpul tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial.

Simpul pada graf dapat dinomori dengan huruf, seperti $a,b,c,\ldots,v,w,\ldots,$ dengan bilangan asli $1,2,3,\ldots,$ atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v dinyatakan dengan pasangan (u,v) atau dinyatakan dengan lambang $e_1,e_2,\ldots$. Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v, maka e dapat ditulis sebagai $e=(v,u)$.

2.2 Terminologi Graf

Ada beberapa terminologi (istilah) dasar dalam graf diantaranya sebagai berikut:

1. Bertetangga (*Adjacent*)

   Definisi 2.2 (Munir, 2005) Dua buah simpul pada graf tak berarah G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika (u,v) adalah sebuah sisi pada graf G.

2. Bersisian (*Incident*)

   Definisi 2.3 (Munir, 2005) Untuk sembarang sisi $e=(u,v)$, sisi e dikatakan bersisian dengan simpul u dan simpul v.

3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

   Definisi 2.4 (Munir, 2005) Simpul terpencil ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya. Atau dapat juga dinyatakan bahwa simpul terpencil adalah simpul yang tidak satupun bertetangga dengan simpul-simpul lainnya.

4. Graf Kosong (*Null Graph atau Empty Graph*)

   Definisi 2.5 (Munir, 2005) Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong disebut sebagai graf kosong dan ditulis sebagai N_n yang dalam hal ini n adalah jumlah simpul.

5. Derajat (*Degree*)

   Definisi 2.6 (Munir, 2005) Derajat suatu simpul pada graf tak-berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

6. Lintasan (*Path*)

   Definisi 2.7 (Munir, 2005) Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk v_0, e_1, v_1, e_2, …, v_{n-1}, e_n, v_n, sedemikian sehingga $e_1=(v_0,v_1)$, $e_2=(v_1,v_2)$, …, $e_n=(v_{n-1},v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G.

7. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)

Definisi 2.8 (Munir, 2005) Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut sirkuit atau siklus.

8. Terhubung (*Connected*)

Definisi 2.9 (Munir, 2005) Graf tak-berarah G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul u dan v di dalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v. Jika tidak, maka G disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*).

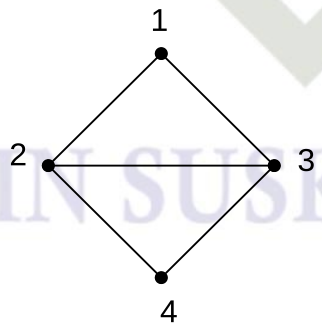
2.3 Jenis-jenis Graf

Graf dapat di kelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknnya sisi ganda atau sisi kalang, berdasarkan jumlah simpul, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi (Munir, 2005).

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, secara umum graf dapat dapat digolongkan menjadi dua jenis, yaitu (Munir, 2005):

1. Graf sederhana (*simple graph*).

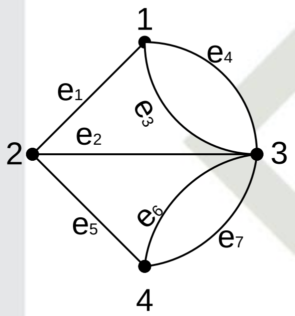
Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana. Pada graf sederhana, sisi adalah pasangan tak-terurut (unordered pairs). Jadi, menuliskan sisi (v,u). Kita dapat juga mendefinisikan graf sederhana $G=(V,E)$ terdiri dari himpunan tidak kosong simpul-simpul dan E adalah himpunan pasangan tak-terurut yang berbeda yang disebut sisi.

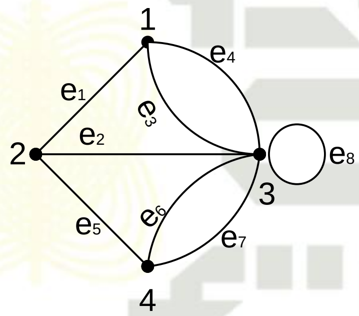


Gambar 2.1 Graf Sederhana

2. Graf tak-sederhana (*unsimple-graph*)

Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak sederhana (*unsimple-graph*). Ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graph semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Sisi ganda yang menghubungkan sepasang simpul bisa lebih dari dua buah. Sisi ganda dapat diasosiasikan sebagai pasangan tak-terurut yang sama. Dapat juga mendefinisikan graf ganda $G=(V,E)$ terdiri dari himpunan tidak kosong simpul-simpul dan E adalah himpunan-ganda (*multiset*) yang mengandung sisi ganda. Graf semu adalah graf yang mengandung gelang (*loop*). Jumlah simpul pada graf kita sebut sebagai kardinalitas graf, dan dinyatakan dengan $n=|V|$ dan jumlah sisi kita nyatakan dengan $m=|E|$.



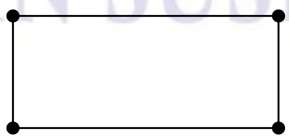


(a). Gambar 2.2 Graf Ganda **(b). Gambar 2.3 Graf Semu**

Sisi pada graf dapat mempunyai orientasi arah. Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis, yaitu (Munir, 2005):

1. Graf tak-berarah (*undirected graph*)

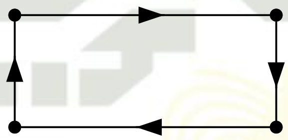
Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Pada graf tak-berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $(u,v)=(v,u)$ adalah sisi yang sama.



Gambar 2.4 Graf Tak Berarah (*Undirected Graph*)

2. Graf berarah (*directed graph* atau *digraph*)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Pada graf berarah, (u,v) dan (v,u) menyatakan dua buah busur yang berbeda, dengan kata lain $(u,v) \neq (v,u)$. Untuk busur (v,u), simpul u dinamakan simpul asal (*initial vertex*) dan simpul v dinamakan simpul terminal (*terminal vertex*). Graf berarah sering dipakai untuk menggambarkan aliran proses, peta lalu lintas suatu kota (jalan searah atau dua arah), dan sebagainya. Pada graf berarah, gelang diperbolehkan, tetapi sisi ganda tidak. Definisi graf dapat diperluas sehingga mencakup graf-ganda berarah (*directed multi graph*). Pada graf-ganda berarah, gelang dan sisi ganda diperbolehkan ada.

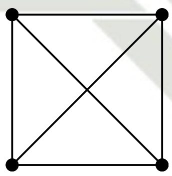


Gambar 2.5 Graf Berarah (*Directed Graph*)

Pada graf sederhana (*simple graph*) terdapat beberapa graf khusus, yaitu (Munir, 2005):

1. Graf Lengkap (*complete graph*)

Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Setiap simpul K_n berderajat $n-1$.

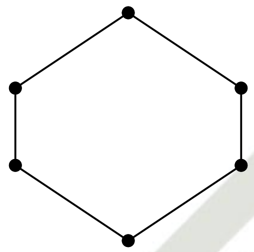


Gambar 2.6 Graf Lengkap K_4

2. Graf Lingkaran (*Cycle*)

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n. Jika simpul-simpul pada C_n adalah $v_1, v_2, \ldots, v_n$, maka sisi-sisinya adalah $(v_1v_2), (v_2v_3), \ldots,$

(v_{n-1}, v_n), dan (v_n, v_1). Dengan kata lain, ada sisi dari simpul terakhir, v_n, ke simpul pertama, v_1.



Gambar 2.7 Graf Lingkaran C_6

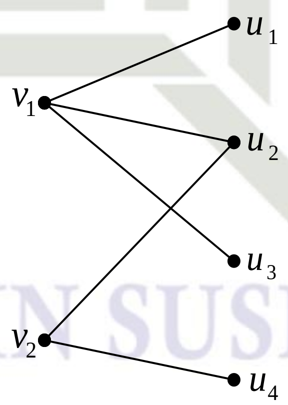
3. Graf Teratur (*Regular Graphs*)

Graf teratur adalah graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap simpul adalah r, maka graf tersebut sebagai graf teratur derajat r.

Gambar 2.8 Graf Teratur

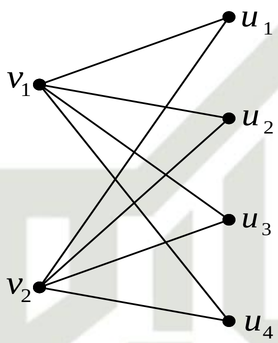
4. Graf Bipartit (*Bipartite Graph*)

Definisi 2.10 (Ramdani, 2014) Suatu graf G disebut graf bipartit jika himpunan tekniknya dapat dipartisi menjadi dua sub himpunan X dan Y sedemikian sehingga setiap sisi menghubungkan suatu titik di X ke suatu titik di Y.



Gambar 2.9 Graf Bipartit

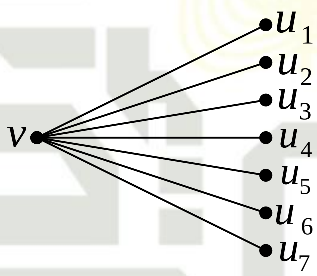
Definisi 2.11 (Ramdani, 2014) suatu graf bipartit G disebut graf bipartit lengkap jika setiap titik di X bertetangga dengan setiap titik di Y. Jika banyaknya titik di X adalah m dan banyaknya titik di Y adalah n, maka graf bipartit G dinotasikan dengan $K_{m,n}$.



Gambar 2.10 Graf Bipartit Lengkap $K_{2,4}$

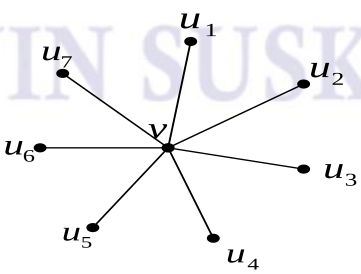
5. Graf Bintang

Graf bintang dinotasikan dengan S_n, adalah suatu graf bipartit lengkap K_1, n.



Gambar 2.11 Graf Bintang $S_7 \approx K_{1,7}$

Graf bintang dapat juga diilustrasikan dalam bentuk lain seperti pada gambar 2.12:



Gambar 2.12 Graf Bipartit Bintang $S_7 \approx K_{1,7}$

2.4 Pelabelan Graf

Salah satu jenis pelabelan yang belakangan ini sering menjadi perbincangan yaitu pelabelan total tak teratur. Pelabelan total tak teratur pertama kali diperkenalkan oleh Baca dkk., (2007). Pelabelan total tak teratur terdiri dari pelabelan total tak teratur titik, pelabelan total tak teratur sisi, dan pelabelan total tak teratur total. Berikut ini penjelasan tentang tiga jenis pelabelan total tak teratur, yaitu: pelabelan total tak teratur titik, pelabelan total tak teratur sisi dan pelabelan total tak teratur total .

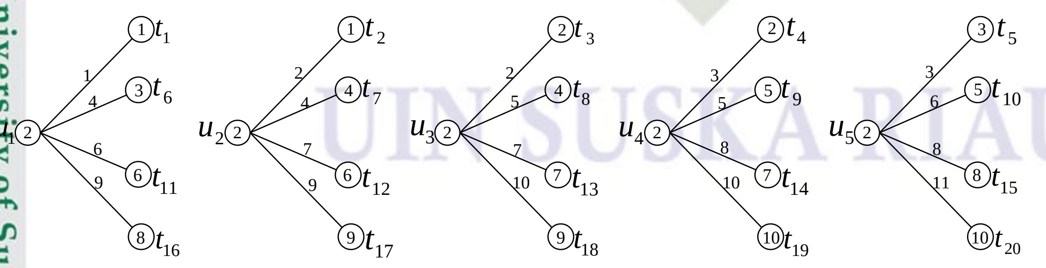
2.4.1 Pelabelan-k Total Tak Teratur Titik

Pelabelan-k total tak teratur titik pertama kali diperkenalkan oleh Baca dkk., (2007) dalam paper yang berjudul "*On Irreguler Total Labellings*".

Definisi 2.12 (Baca dkk., 2007) Misalkan $G=(V,E)$ adalah sebuah graf. Pelabelan $\lambda : V \cup E \to \{1,2,\ldots k\}$ dikatakan pelabelan-k total tak teratur titik di G, jika setiap dua titik berbeda x dan y di G memenuhi $w_f(x) \neq w_f(y)$. $w_f(x)$ merupakan bobot titik x yang dinyatakan sebagai:

$$w_f(x) = f(x) + \sum_{xy \in E} f(xy).$$

Nilai ketakteraturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari graf G yang dinotasikan dengan $tvs(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik. Berikut akan disajikan contoh pelabelan-k total tak teratur titik pada graf $5S_4$:



Gambar 2.13 Pelabelan-11 Total Tak Teratur Titik pada Graf $5S_4$

Selanjutnya, akan dihitung bobot setiap titik pada graf $5S_4$, dengan cara menjumlahkan setiap label titik dan label sisi yang terkait dengan titik tersebut. Perhitungan bobot titik graf $5S_4$ sebagai berikut:

$$w_f(u_1) = f(u_1) + f(u_1t_1) + f(u_1t_6) + f(u_1t_{11}) + f(u_1t_{16})$$
$$= 2+1+4+6+9$$
$$= 22;$$

$$w_f(u_2) = f(u_2) + f(u_2t_2) + f(u_2t_7) + f(u_2t_{12}) + f(u_2t_{17})$$
$$= 2+2+4+7+9$$
$$= 24;$$

$$w_f(u_3) = f(u_3) + f(u_3t_3) + f(u_3t_8) + f(u_3t_{13}) + f(u_3t_{18})$$
$$= 2+2+5+7+10$$
$$= 26;$$

$$w_f(u_4) = f(u_4) + f(u_4t_4) + f(u_4t_9) + f(u_4t_{14}) + f(u_4t_{19})$$
$$= 2+3+5+8+10$$
$$= 28;$$

$$w_f(u_5) = f(u_5) + f(u_5t_5) + f(u_5t_{10}) + f(u_5t_{15}) + f(u_5t_{20})$$
$$= 2+3+6+8+11$$
$$= 30;$$

$$w_f(t_1) = f(t_1) + f(u_1t_1) = 1+1 = 2;$$
$$w_f(t_2) = f(t_2) + f(u_2t_2) = 1+2 = 3;$$
$$w_f(t_3) = f(t_3) + f(u_3t_3) = 2+2 = 4;$$
$$w_f(t_4) = f(t_4) + f(u_4t_4) = 2+3 = 5;$$
$$w_f(t_5) = f(t_5) + f(u_5t_5) = 3+3 = 6;$$
$$w_f(t_6) = f(t_6) + f(u_1t_6) = 3+4 = 7;$$
$$w_f(t_7) = f(t_7) + f(u_2t_7) = 4+4 = 8;$$
$$w_f(t_8) = f(t_8) + f(u_3t_8) = 4+5 = 9;$$
$$w_f(t_9) = f(t_9) + f(u_4t_9) = 5+5 = 10;$$

$w_f(t_{10}) = f(t_{10}) + f(u_5 t_{10}) = 5 + 6 = 11;$

$w_f(t_{11}) = f(t_{11}) + f(u_1 t_{11}) = 6 + 6 = 12;$

$w_f(t_{12}) = f(t_{12}) + f(u_2 t_{12}) = 6 + 7 = 13;$

$w_f(t_{13}) = f(t_{13}) + f(u_3 t_{13}) = 7 + 7 = 14;$

$w_f(t_{14}) = f(t_{14}) + f(u_4 t_{14}) = 7 + 8 = 15;$

$w_f(t_{15}) = f(t_{15}) + f(u_5 t_{15}) = 8 + 8 = 16;$

$w_f(t_{16}) = f(t_{16}) + f(u_1 t_{16}) = 8 + 9 = 17;$

$w_f(t_{17}) = f(t_{17}) + f(u_2 t_{17}) = 9 + 9 = 18;$

$w_f(t_{18}) = f(t_{18}) + f(u_3 t_{18}) = 9 + 10 = 19;$

$w_f(t_{19}) = f(t_{19}) + f(u_4 t_{19}) = 10 + 10 = 20;$

$w_f(t_{20}) = f(t_{20}) + f(u_5 t_{20}) = 10 + 11 = 21.$

Dari hasil perhitungan bobot titik pada graf $5S_4$, diperoleh bobot setiap titik berbeda. Oleh karena itu, f adalah pelabelan-11 total tak teratur titik pada graf $5S_4$.

Hasil penelitian tentang nilai total ketakteraturan titik diberikan pada teorema-teorema berikut:

Teorema 2.1 (Baca dkk., 2007) Misalkan G adalah graf (p,q) dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ. Maka

$$\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \le tvs(G) \le p + \Delta - 2\delta + 1.$$

Teorema 2.2 (Baca dkk., 2007) Misalkan K_p adalah graf lengkap dengan p titik, maka

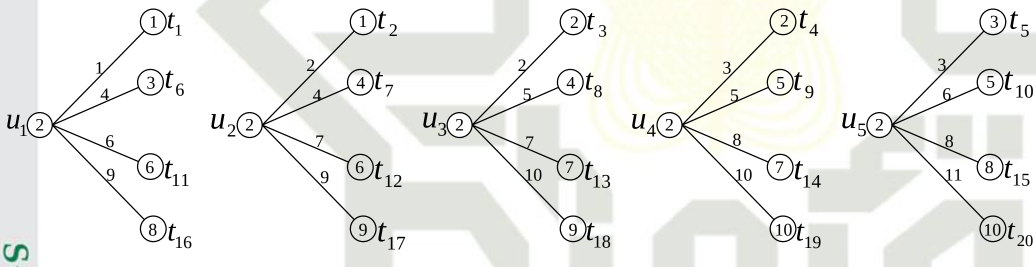
$$tvs(K_p) = 2.$$

2.4.2 Pelabelan-k Total Tak Teratur Sisi

Pelabelan-k total tak teratur sisi juga diperkenalkan oleh Baca dkk., (2007) dan juga banyak digunakan untuk mencari nilai ketakteraturan sisi berbagai jenis graf. Berikut ini definisi pelabelan total tak teratur sisi.

Definisi 2.13 (Baca dkk., 2007) Pelabelan-k total dikatakan pelabelan-k total tak teratur sisi dari graf G, jika untuk sembarang dua sisi $e = u_1u_2$ dan $w = v_1v_2$ yang berbeda di graf G berlaku $w_f(e) \neq w_f(w)$ dengan $w_f(e) = f(u_1) + f(e) + f(u_2)$ dan $w_f(w) = f(v_1) + f(w) + f(v_2)$.

Nilai ketakteraturan sisi *(total edge irregularity strength)* dari graf G yang dinotasikan dengan $tes(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi. Berikut ini akan disajikan contoh pelabelan-k total ketakteraturan sisi pada graf $5S_4$:



Gambar 2.14 Pelabelan-11 Total Tak Teratur Sisi pada Graf $5S_4$

Selanjutnya, akan dihitung bobot setiap sisi pada graf $5S_4$, dengan cara menjumlahkan setiap label titik dan label sisi yang terkait dengan sisi tersebut. Perhitungan bobot sisi pada graf $5S_4$ sebagai berikut:

$w_f(u_1t_1) = f(u_1) + f(u_1t_1) + f(t_1) = 2 + 1 + 1 = 4;$

$w_f(u_2t_2) = f(u_2) + f(u_2t_2) + f(t_2) = 2 + 2 + 1 = 5;$

$w_f(u_3t_3) = f(u_3) + f(u_3t_3) + f(t_3) = 2 + 2 + 2 = 6;$

$w_f(u_4t_4) = f(u_4) + f(u_4t_4) + f(t_4) = 2 + 3 + 2 = 7;$

$w_f(u_5t_5) = f(u_5) + f(u_5t_5) + f(t_5) = 2 + 3 + 3 = 8;$

$w_f(u_1t_6) = f(u_1) + f(u_1t_6) + f(t_6) = 2+4+3 = 9;$

$w_f(u_2t_7) = f(u_2) + f(u_2t_7) + f(t_7) = 2+4+4 = 10;$

$w_f(u_3t_8) = f(u_3) + f(u_3t_8) + f(t_8) = 2+5+4 = 11;$

$w_f(u_4t_9) = f(u_4) + f(u_4t_9) + f(t_9) = 2+5+5 = 12;$

$w_f(u_5t_{10}) = f(u_5) + f(u_5t_{10}) + f(t_{10}) = 2+6+5 = 13;$

$w_f(u_1t_{11}) = f(u_1) + f(u_1t_{11}) + f(t_{11}) = 2+6+6 = 14;$

$w_f(u_2t_{12}) = f(u_2) + f(u_2t_{12}) + f(t_{12}) = 2+7+6 = 15;$

$w_f(u_3t_{13}) = f(u_3) + f(u_3t_{13}) + f(t_{13}) = 2+7+7 = 16;$

$w_f(u_4t_{14}) = f(u_4) + f(u_4t_{14}) + f(t_{14}) = 2+8+7 = 17;$

$w_f(u_5t_{15}) = f(u_5) + f(u_5t_{15}) + f(t_{15}) = 2+8+8 = 18;$

$w_f(u_1t_{16}) = f(u_1) + f(u_1t_{16}) + f(t_{16}) = 2+9+8 = 19;$

$w_f(u_2t_{17}) = f(u_2) + f(u_2t_{17}) + f(t_{17}) = 2+9+9 = 20;$

$w_f(u_3t_{18}) = f(u_3) + f(u_3t_{18}) + f(t_{18}) = 2+10+9 = 21;$

$w_f(u_4t_{19}) = f(u_4) + f(u_4t_{19}) + f(t_{19}) = 2+10+10 = 22;$

$w_f(u_5t_{20}) = f(u_5) + f(u_5t_{20}) + f(t_{20}) = 2+11+10 = 23.$

Dari hasil perhitungan bobot sisi pada graf $5S_4$, diperoleh bobot setiap sisi berbeda. Oleh karena itu, f adalah pelabelan-11 total tak teratur sisi pada graf $5S_4$.

Penelitian mengenai nilai $tes(G)$ dilakukan oleh Baca, dkk., dengan diberikan batas atas dan batas bawah seperti dituliskan pada teorema berikut ini:

Teorema 2.3 (Baca dkk., 2007) Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi tak kosong E, maka

$$\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \le tes(G) \le |E|.$$

Teorema 2.4 (Baca dkk., 2007) Misalkan P_n adalah graf lintasan dengan banyaknya sisi n, dimana $n \geq 1$, maka

$$tes(P_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil.$$

Teorema 2.5 (Baca dkk., 2007) Misalkan C_n adalah graf lingkaran dengan banyaknya sisi n, dimana $n \geq 3$, maka

$$tes(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil.$$

Teorema 2.6 (Siddiqui dkk., 2013) Misalkan $p, n \geq 3$ dua bilangan bulat. Maka nilai total ketakteraturan sisi dari gabungan saling lepas dari p graf matahari yang isomorf adalah

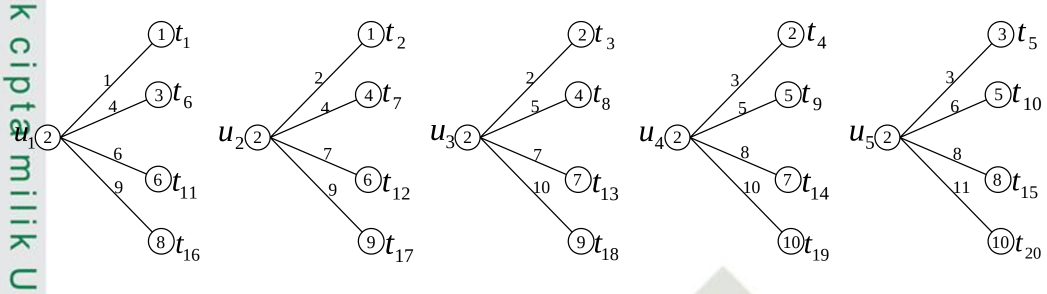
$$\left\lceil \frac{2(pn+1)}{3} \right\rceil.$$

2.4.3 Pelabelan-k Total Tak Teratur Total

Pelabelan-k total tak teratur total diperkenalkan oleh Marzuki dkk., (2013) dan banyak digunakan untuk mencari nilai ketakteraturan total berbagai jenis graf. Berikut ini definisi pelabelan total tak teratur total.

Definisi 2.14 (Marzuki dkk., 2013) Pelabelan-k total tak teratur total pada tak teratur total pada G adalah pemetaan $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \cdots, k\}$ yang memenuhi $w_f(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$ berbeda untuk setiap $uv \in E(G)$ dan $w_f(u) = w_f(v) = f(v) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$.

Nilai k terkecil sehingga suatu pelabelan graf G dapat dilabeli dengan pelabelan-k total tak teratur total, dinotasikan dengan $ts(G)$, disebut nilai ketakteraturan total dari graf G. Berikut ini akan disajikan contoh pelabelan-k total ketakteraturan total pada graf $5S_4$:



Gambar 2.15 Pelabelan-11 Total Tak Teratur Total pada Graf $5S_4$

Dari hasil perhitungan bobot titik pada sub bab 2.4.1 dan bobot sisi pada sub bab 2.4.2 pada graf $5S_4$, diperoleh bobot setiap titik berbeda dan bobot setiap sisi berbeda. Oleh karena itu, f adalah pelabelan-11 total tak teratur total pada graf $5S_4$.

Pelabelan total tak teratur total diperkenalkan oleh Marzuki dkk., (2013) dengan diberikan batas bawah dari $ts(G)$. Di samping itu, diberikan juga nilai ketakteraturan total dari graf lintasan dan lingkaran. Hasil-hasil yang diberikan sebagai berikut:

Teorema 2.7 (Marzuki dkk., 2013) Untuk setiap graf G, berlaku

$$ts(G) \geq \max\{tes(G), tvs(G)\}$$

Teorema 2.8 (Marzuki dkk., 2013) Misalkan $n \geq 3$ suatu bilangan bulat positif dan C_n adalah lingkaran dengan n sisi. Maka

$$ts(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$$

Teorema 2.9 (Marzuki dkk., 2013) Misalkan n suatu bilangan bulat positif dan P_n adalah lintasan dengan n titik. Maka

$$ts(P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil & untuk\ n = 2\ atau\ n = 5 \\ \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil & untuk\ n\ lainnya \end{cases}$$

Selanjutnya hasil penelitian mengenai nilai ketakteraturan total dari dua *copy* graf bintang diberikan pada teorema berikut ini.

Teorema 3.10 (Ramdani, 2014) Misalkan $n \geq 2$, maka $ts(2S_n) = n+1$.

Bukti. Graf $2S_n$ memiliki $2n$ titik berderajat 1 dan 2 titik berderajat n. Maka bobot titik terkecil dari $2S_n$ sedikitnya 2, dan bobot terbesar dari suatu titik berderajat 1 sedikitnya $2n+1$, sehingga label terbesar dari titik berderajat 1 adalah sedikitnya $\left\lceil \frac{2n+1}{2} \right\rceil = n+1$. Bobot terkecil dari suatu titik berderajat n sedikitnya $2n+2$, dan bobot terbesar dari suatu titik berderajat n adalah $2n+3$, sehingga label terbesar dari suatu titik berderajat n adalah sedikitnya $\left\lceil \frac{2n+3}{n+1} \right\rceil = 3$. Dengan demikian,

$$tvs(2S_n) \geq \max\{n+1, 3\} = n+1 \quad (2.1)$$

Selain itu, banyaknya sisi dari $2S_n$ adalah $2n$, sehingga berdasarkan Teorema 2.3

$$tes(2S_n) \geq \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil \quad (2.2)$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema 2.7

$$ts(2S_n) \geq n+1. \quad (2.3)$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $ts(2S_n) \leq n+1$.

a. **Kasus 1**: Untuk $n \in \{2,3,4\}$.

Definisikan suatu pelabelan total f pada $2S_n$ sebagai berikut:

$$f(u_i) = \begin{cases} 1 \ untuk \ i = 0\,; \\ \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil \ untuk \ 1 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$f(u_0u_i) = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 1 \ untuk \ 1 \leq i \leq n;$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 \ untuk \ i = 0; \\ \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \ untuk \ i = 1; \\ i+1 \ untuk \ 1 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$f(v_0v_i) = \begin{cases} 3 \ untuk \ i = 0; \\ \left\lceil \frac{n+4}{2} \right\rceil \ untuk \ i = 2; \\ 4 \ untuk \ i = 3; \\ 5 \ untuk \ i = 4; \end{cases}$$

Berdasarkan pelabelan f diatas, diperoleh bobot pada setiap titik dan setiap sisi sebagai berikut:

1. Untuk $n = 2$.

Bobot pada setiap titik pada $2S_2$ adalah

$$w_f(u_0) = 4;$$
$$w_f(u_1) = 2;$$
$$w_f(u_2) = 3;$$
$$w_f(v_0) = 7;$$
$$w_f(v_1) = 5;$$
$$w_f(v_2) = 6.$$

Bobot pada setiap sisi pada $2S_2$ adalah

$$w_f(u_0u_1) = 3;$$
$$w_f(u_0u_2) = 4;$$
$$w_f(v_0v_1) = 6;$$
$$w_f(v_0v_2) = 7.$$

Mudah dilihat bahwa bobot semua titik dan bobot semua sisi pada $2S_2$ berbeda.

2. Untuk $n = 3$.

Bobot pada setiap titik $2S_3$ adalah

$$w_f(u_0) = 6;$$
$$w_f(u_1) = 2;$$
$$w_f(u_2) = 3;$$
$$w_f(u_3) = 4;$$
$$w_f(v_0) = 12;$$
$$w_f(v_1) = 5;$$
$$w_f(v_2) = 7;$$

$$w_f(v_3) = 8.$$

Bobot pada setiap sisi pada $2S_3$ adalah

$$w_f(u_0u_1) = 3;$$

$$w_f(u_0u_2) = 4;$$

$$w_f(u_0u_3) = 5;$$

$$w_f(v_0v_1) = 6;$$

$$w_f(v_0v_2) = 8;$$

$$w_f(v_0v_3) = 9.$$

Dapat dilihat bahwa bobot semua titik dan bobot semua sisi pada $2S_3$ berbeda

3. Untuk $n = 4$.

Bobot pada setiap titik $2S_4$ adalah

$$w_f(u_0) = 9;$$

$$w_f(u_1) = 2;$$

$$w_f(u_2) = 3;$$

$$w_f(u_3) = 4;$$

$$w_f(u_4) = 5;$$

$$w_f(v_0) = 17;$$

$$w_f(v_1) = 6;$$

$$w_f(v_2) = 7;$$

$$w_f(v_3) = 8;$$

$$w_f(v_4) = 10.$$

Bobot pada setiap sisi pada $2S_4$ adalah

$$w_f(u_0u_1) = 3;$$

$$w_f(u_0u_2) = 4;$$

$$w_f(u_0u_3) = 5;$$

$$w_f(u_0u_4) = 6;$$

$$w_f(v_0v_1) = 7;$$

$$w_f(v_0v_2) = 8;$$

$$w_f(v_0v_3) = 9;$$

$$w_f(v_0v_4) = 11.$$

Mudah dilihat bahwa bobot semua titik dan bobot semua sisi $2S_4$ berbeda.

b. **Kasus 2** : Untuk $n \geq 5$.

Definisikan suatu pelabelan f pada $2S_n$, untuk $n \geq 5$, sebagai berikut:

$$f(u_i) = \begin{cases} 1 \; untuk \; i = 0; \\ \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil \; untuk \;\; 1 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$f(u_0u_i) = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 1 \; untuk \; 1 \leq i \leq n;$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 \; untuk \; i = 0 \\ \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \; untuk \; 1 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$f(v_0v_i) = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \; untuk \; 1 \leq i \leq n.$$

Berdasarkan pelabelan f di atas, diperoleh bobot pada setiap titik dan bobot pada setiap sisi $2S_n$ sebagai berikut:

1. Bobot pada setiap titik di $2S_n$, untuk $n \geq 5$, adalah

$$w_f(u_0) = \begin{cases} \frac{n^2+4n+3}{4} \; untuk \; n \; ganjil; \\ \frac{n^2+4n+4}{4} \; untuk \; n \; genap; \end{cases}$$

$$w_f(u_i) = i + 1 \; untuk \; 1 \leq i \leq n;$$

$$w_f(v_0) = \begin{cases} \frac{3n^2+4n+5}{4} \; untuk \; n \; ganjil; \\ \frac{3n^2+4n+4}{4} \; untuk \; n \; genap; \end{cases}$$

$$w_f(v_i) = n + i + 1 \; untuk \; 1 \leq i \leq n.$$

2. Bobot pada setiap titik di $2S_n$, untuk $n \geq 5$, adalah

$$w_f(u_0u_i) = i + 2 \; untuk \; 1 \leq i \leq n;$$

$$w_f(v_0v_i) = n + i + 2 \; untuk \; 1 \leq i \leq n;$$

Jelas bahwa tidak ada dua titik yang memiliki bobot yang sama dan tidak ada dua sisi yang memiliki bobot yang sama. Dengan demikian, f adalah suatu pelabelan-$(n+1)$ total tak teratur total pada $2S_n$, sehingga $ts(2S_n) = n+1$.

2.5 Induksi Matematika

Induksi matematika merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika. Melalui induksi matematika kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas. Pada induksi matematika berisi prinsip-prinsip induksi matematika, seperti prinsip induksi sederhana, prinsip induksi yang dirampatkan, prinsip induksi kuat dan induksi secara umum sebagai berikut (Munir, 2005):

A. Prinsip Induksi Sederhana

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif, dan ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan proposisi ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa (Munir, 2005):

1. $p(1)$ benar
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**. Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**. Bila sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka terbukti bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

B. Prinsip Induksi Kuat

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, hanya perlu menunjukkan bahwa (Munir, 2005):

1. $p(n_0)$ benar
2. Jika $p(n_0), p(n_0+1), \cdots, p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap bilangan bulat $n \geq n_0$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

C. Prinsip Induksi Secara Umum

Misalkan X terurut dengan baik oleh "<", dan $p(x)$ adalah pernyataan perihal elemen x dari X. Untuk membuktikan bahwa $p(x)$ benar untuk semua $x \in X$, hanya perlu menunjukkan bahwa (Munir, 2005):

1. $p(x_0)$ benar, yang dalam ini x_0 adalah elemen terkecil di dalam X.
2. Jika $p(y)$ benar untuk $y < x$, maka $p(x)$ juga benar untuk setiap $x > x_0$ di dalam X.

Sehingga $p(x)$ benar untuk semua $x \in X$.

D. Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, hanya perlu menunjukkan bahwa (Munir, 2005):

1. $p(n_0)$ benar
2. Jika $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq n_0$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

Contoh:

Gunakan induksi matematika untuk menunjukkan bahwa $2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$ untuk semua bilangan bulat tidak negatif n.

Penyelesaian:

1. **Langkah Basis Induksi**

   Akan ditunjukkan $p(0)$ adalah benar, berlaku

   $$2^n=2^{n-1}-1$$

   Perhatikan bahwa

   $$2^n=2^0=1=2^{0+1}-1=2^{n+1}-1$$

   Maka $p(0)$ benar

2. **Langkah Induksi**

   Asumsikan benar untuk $p(n)$

   $$2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$$

   Akan ditunjukkan benar $p(n+1)$, yaitu

   $$2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n+2^{n+1}=2^{(n+1)+1}-1$$

   Perhatikan bahwa

   $$\begin{aligned}\Leftrightarrow 2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n+2^{n+1} &= (1+2+2^2+\cdots+2^n)+2^{n+1}\\ &= (2^{n+1}-1)+2^{n+1}\\ &= (2^{n+1}+2^{n+1})-1\\ &= 2.2^{n+1}-1\\ &= 2^{n+2}-1\\ &= 2^{(n+1)+1}-1\end{aligned}$$

   Karena langkah basis induksi dan langkah induksi benar, terbukti bahwa $2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$ untuk semua bilangan bulat tidak negatif n.■

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini adalah penelitian fundamental yang mengarah kepada penjelasan untuk memperoleh metode atau teori baru. Dalam penyelesaian tugas akhir ini metodologi yang digunakan adalah metode studi pustaka (literature) dengan menggunakan referensi seperti buku-buku, dan jurnal yang berhubungan dengan penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang digunakan untuk menentukan rumus nilai total ketakteraturan total dari lima *copy* graf bintang yaitu:

1. Diberikan $5S_n$ adalah lima *copy* graf bintang dengan n bilangan positif dan $n \geq 3$.
2. Menentukan batas bawah $tvs(5S_n)$ yang akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.
3. Menentukan batas bawah $tes(5S_n)$ dengan menggunakan Teorema 2.3.
4. Setelah didapatkan langkah 1 dan 2, kemudian tentukan batas bawah dari $ts(5S_n)$ dengan menggunakan Teorema 2.7 dan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.
5. Menentukan pelabelan total tak teratur total pada lima *copy* graf bintang $5S_n$ untuk $n = 3,4,\ldots,10$ dengan label terbesarnya adalah batas bawah yang diperoleh dari langkah 3.
6. Menentukan rumus untuk label titik dari $5S_n$ dengan mengacu pada pola pelabelan yang terdapat pada langkah 4.
7. Menentukan rumus untuk label sisi dari $5S_n$ dengan mengacu pada pelabelan yang terdapat pada langkah 4.
8. Berdasarkan langkah yang didapat pada langkah 5 dan 6, dapat ditentukan rumus untuk bobot titik dari $5S_n$.
9. Kemudian berdasarkan langkah yang didapat pada langkah 5 dan 6, dapat ditentukan rumus untuk bobot sisi dari $5S_n$.

10. Membuktikan pelabelan yang diperoleh merupakan pelabelan total tak teratur total pada lima *copy* graf bintang $5S_n$ untuk $n \geq 3$, dengan membuktikan tidak ada titik yang memiliki bobot yang sama dan tidak ada sisi yang memiliki bobot yang sama menggunakan induksi matematika.
11. Mengaplikasikan rumus $ts(5S_n)$ yang telah diperoleh untuk $n = 13$.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh pada Bab IV tentang nilai ketakteraturan total pada graf $5S_n$, diperoleh bahwa $ts(5S_n) = \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$ dengan $n \geq 3$. Hal ini telah dibuktikan dengan $ts(5S_n) \geq \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$ dan $ts(5S_n) \leq \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$. Untuk $ts(5S_n) \leq \left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$ dibuktikan dengan cara menunjukkan adanya pelabelan-$\left\lceil \frac{5n+1}{2} \right\rceil$ total tak teratur total pada graf $5S_n$.

5.2 Saran

Dalam penelitian Tugas Akhir ini penulis membahas tentang nilai ketakteraturan total lima *copy* graf bintang. Bagi pembaca yang berminat untuk melanjutkan tugas akhir ini, penulis sarankan untuk melanjutkan pembahasan tentang nilai total ketakteraturan total m *copy* graf bintang. Dan penulis juga menyarankan kepada pembaca untuk membuat pelabelan total tak teratur total dengan $n > 10$ agar lebih terlihat jelas pola yang terbentuk, sehingga dapat memudahkan dalam menentukan rumus umum nilai ketakteraturan total pada graf bintang.

DAFTAR PUSTAKA

Baca, dkk. "On Irregular Total Labellings". *Discrete Math*. Vol. 307, halaman 1378-1388, 2007.

Chartrand, G, dkk." *Graphs and Digraphs*". Florida: CRC Press. 2010.

Julaeha, Siti, dkk. "Pelabelan Total Tak Teratur Total Pada Graf Bunga (F_n)". *J. Istek*. Vol. X, No. 1, halaman 6, 2017.

Marzuki, C. C, dkk. "On The Total Irregularity Strenght of Cycles and Paths". *Far East Journal of Mathematical Sciences*. Vol.82, halaman 1-21, 2013.

Marzuki, C. C, dkk. "Nilai Ketakteraturan Total dari Graf Hasil Kali Comb P_m dan C_5 Dengan m Bilangan Ganjil". *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. Vol. 2, No. 2, halaman 39-47, 2016.

Marzuki, C. C, dkk. "Nilai Ketakteraturan Total dari p-copy Graf Theta Tak Seragam" . *Jurnal Seminar Nasional Teknologi Informasi*, halaman 737-740, 2018.

Munir, R. "*Matematika Diskrit*" Revisi kelima. Bandung: Informatika. 2005.

Rahangmetan, R. D. S, dkk. "Nilai Total Tak Teratur Total Dari Gabungan Terpisah Graf Roda Dan Graf Buku Segitiga": *Jurnal Ilmu Matematika*, Vol. 9, No. 2, halaman 97-102, 2015.

Ramdani, R. "Nilai Total Ketakteraturan Total dari Dua Copy Graf Bintang". *J. Math. Fund. Sci*. Vol 8, No. 2, halaman 4, 2014.

Siddiqui, dkk. "Total Edge Irregularity Strength of The Disjoint Union of Sun Graphs": *International Journal of Matematics and Soft Computing*. Vol. 3, pp. 21-27, 2013.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bagan Batu, pada tanggal 07 Januari 1999, sebagai anak pertama dari empat bersaudara dari pasangan Bapak Lintong Sihombing dan Ibu Marlinda Wati, dengan tiga bersaudara yaitu Esra Lili Lopa Sihombing, Esmai Mira Lopa Sihombing dan Emelin Akia Lopa Sihombing. Penulis menyelesaikan Pendidikan formal Taman Kanak-kanak di TK Yosef Arnoldi pada tahun 2004, Sekolah Dasar di SDS Yosef Arnoldi pada tahun 2010, Sekolah Menengah Pertama di SMPS Yosef Arnoldi pada tahun 2013 dan menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Atas dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) di SMAS Yosef Arnoldi pada tahun 2016.

Setelah menyelesaikan pendidikan di bangku SMA, penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan lulus di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Jurusan Matematika. Pada bulan Februari 2019, penulis melaksanakan kerja praktek di PT. Perkebunan Nusantara V (PTPN V) dengan judul "**Peramalan Jumlah Produksi Kelapa Sawit di PT. Perebunan Nusantara V (PTPN V) dengan Metode *Single Exponential Smooting* dan *Double Exponential Smooting* dari *Brown***" yang dibimbing oleh Ibu Elfira Safitri, M.Mat. Pada bulan Agustus-September 2019 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kabupaten Siak, Kecamatan Pusako, Desa Pebadaran. Tanggal   Juli 2020 penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul Tugas Akhir "**Nilai Ketakteraturan Total dari Lima *Copy* Graf Bintang"** dibawah bimbingan Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si.